

Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 04, No. 1 (2015), hal 47-56.

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS STABILITAS DARI PENULARAN PENYAKIT GONORE

Tri Wahyuni, Bayu Prihandono, Nilamsari Kusumastuti

INTISARI

Gonore merupakan penyakit kelamin yang disebabkan oleh bakteri diplokokus gram negatif, Neisseria gonorrhoeae. Penyakit gonore dapat ditularkan melalui aktifitas seksual dengan seseorang yang telah terinfeksi gonore, melalui ibu hamil yang menderita gonore kepada bayinya, transfusi darah atau penggunaan alat suntik yang telah tercemar bakteri Neisseria gonorrhoeae. Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mencari kriteria kestabilan model penularan penyakit gonore di sekitar titik tetap. Pembentukan model penularan penyakit gonore dimulai dengan membagi populasi menjadi 2 sub-populasi, yaitu sub-populasi rentan (S) dan sub-populasi terinfeksi (I). Besarnya laju perubahan model penularan penyakit gonore terhadap waktu dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu tingkat pengurangan jumlah individu pria yang terinfeksi (a_1), tingkat pengurangan jumlah individu wanita yang terinfeksi (a_2), tingkat penambahan jumlah individu pria yang terinfeksi (b_1), tingkat penambahan jumlah individu wanita yang terinfeksi (b_2), jumlah total pria (C_1), dan jumlah total wanita (C_2). Berdasarkan model yang telah terbentuk, diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Selanjutnya, untuk mencari kriteria kestabilan model penularan penyakit gonore di sekitar titik tetap diselidiki tanda nilai eigen dari matriks Jacobian dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Dari hasil analisis diketahui bahwa sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit stabil asimtotik lokal pada saat $a_1 a_2 > b_1 b_2 C_1 C_2$ yang menunjukkan bahwa dalam waktu lama tidak ada individu yang terjangkit penyakit. Sedangkan titik tetap endemik stabil asimtotik lokal pada saat $a_1 a_2 < b_1 b_2 C_1 C_2$ yang menunjukkan bahwa dalam waktu lama tetap ada individu yang terinfeksi penyakit gonore.

Kata kunci: titik tetap, kestabilan dan Kriteria Routh-Hurwitz

PENDAHULUAN

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan dan pertidaksamaan matematika yang menginterpretasikan permasalahan dunia nyata dalam bahasa matematika. Sedangkan pemodelan matematika dapat dipandang sebagai proses membangun suatu model matematika untuk menggambarkan dinamika suatu sistem, sehingga dapat diketahui atau diperkirakan apa yang akan terjadi pada sistem tersebut dalam jangka waktu tertentu [1]. Pemodelan matematika banyak digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, salah satunya ilmu kesehatan. Pada bidang kesehatan, pemodelan matematika digunakan untuk mengetahui pola penyebaran suatu penyakit, baik penyakit menular maupun yang tidak menular.

Gonore merupakan penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Neisseria gonorrhoeae*. Penyakit gonore ini mempunyai komplikasi yang sangat erat hubungannya dengan anatomi dan genitalia. Selain itu, penyakit gonore dapat pula mengakibatkan infeksi sistemik (seluruh tubuh) ke sendi, jantung, selaput otak dan lain sebagainya [2]. Sementara infeksi mata pada bayi baru lahir yang lebih dikenal dengan Oftalmia neonatorum gonokokus terjadi akibat adanya kontak antara bayi dan jalan lahir yang terinfeksi bakteri *Neisseria gonorrhoeae*. Konjungtivitis yang muncul pertama kali cepat menyebar dan jika tidak diterapi dapat mengakibatkan kebutaan pada bayi [3]. Pada individu yang telah terinfeksi bakteri *Neisseria gonorrhoeae* tidak timbul imunitas alami, sehingga infeksi dapat terjangkit lebih dari satu kali [4].

Model penularan penyakit gonore merupakan suatu model matematika yang menggambarkan dinamika penularan penyakit gonore. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mencari kriteria kestabilan model penularan penyakit gonore di sekitar titik tetap. Pembentukan model penularan penyakit gonore dimulai dengan membagi populasi menjadi dua sub-populasi yaitu sub-populasi *susceptible* dan *infective*. Analisis kestabilan model dilakukan pada kestabilan asimtotik lokal model. Penelitian dimulai dengan mempelajari dinamika penularan penyakit gonore. Lalu disusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model. Kemudian didefinisikan parameter yang digunakan pada model. Selanjutnya

dibentuk model penularan penyakit gonore. Setelah itu dicari titik tetap pada model. Linearisasi dengan membentuk matriks Jacobian sistem dilakukan untuk menyelidiki kestabilan pada setiap titik tetap. Kemudian dicari nilai-nilai eigen dari polinomial karakteristik. Kestabilan sistem di sekitar titik tetap dianalisis berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz. Model penularan penyakit gonore diilustrasikan dengan simulasi dan interpretasi pada model berdasarkan parameter yang disajikan dalam bentuk potret fase dan grafik.

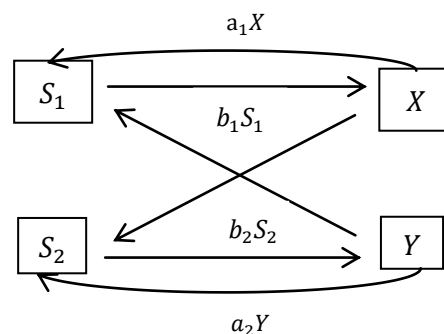
MODEL PENULARAN PENYAKIT GONORE

Model penularan penyakit gonore merupakan suatu model matematika yang menggambarkan dinamika penularan penyakit gonore. Pembentukan model penularan penyakit gonore dimulai dengan membagi populasi menjadi dua sub-populasi, yaitu sub-populasi rentan (S) dan sub-populasi terinfeksi (I). Sub-populasi rentan (S) terdiri dari jumlah individu pria yang rentan terhadap penyakit (S_1) dan jumlah individu wanita yang rentan terhadap penyakit (S_2). Sedangkan sub-populasi terinfeksi (I) terdiri dari jumlah individu pria yang terinfeksi penyakit (X) dan jumlah individu wanita yang terinfeksi penyakit (Y).

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk merumuskan model penularan penyakit gonore:

1. Model penularan penyakit gonore dalam penelitian ini berlaku untuk populasi heteroseksual.
2. Populasi memiliki perilaku seragam.
3. Tingkat pengurangan jumlah individu pria yang terinfeksi diperoleh dengan membagi jumlah individu pria yang telah sembuh dari infeksi dengan jumlah individu pria yang terinfeksi. Tingkat pengurangan jumlah individu pria yang terinfeksi dilambangkan dengan a_1 . Sedangkan tingkat pengurangan jumlah individu wanita yang terinfeksi diperoleh dengan membagi jumlah individu wanita yang telah sembuh dari infeksi dengan jumlah individu wanita yang terinfeksi. Tingkat pengurangan jumlah individu wanita yang terinfeksi dilambangkan dengan a_2 .
4. Tingkat penambahan jumlah individu pria yang terinfeksi diperoleh dengan membagi jumlah wanita terinfeksi dengan jumlah individu pria yang rentan. Tingkat penambahan jumlah individu pria yang terinfeksi dilambangkan dengan b_1 . Sedangkan tingkat penambahan jumlah individu wanita yang terinfeksi diperoleh dengan membagi jumlah pria yang terinfeksi dengan jumlah wanita yang rentan. Tingkat penambahan jumlah individu wanita yang terinfeksi ini dilambangkan dengan b_2 .
5. Jumlah total pria dan jumlah total wanita dianggap konstan yang masing-masing dilambangkan dengan C_1 dan C_2 .

Model penularan penyakit gonore ini direpresentasikan dalam diagram transfer berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Model Penularan Penyakit Gonore

Model penularan penyakit gonore adalah sebagai berikut [5, 6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -b_1 S_1 Y + a_1 X \\ \frac{dS_2}{dt} &= -b_2 S_2 X + a_2 Y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

atau

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -a_1 X + b_1 S_1 Y \\ \frac{dY}{dt} &= -a_2 Y + b_2 S_2 X \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Model (1) pada prinsipnya adalah identik dengan model (2). Sehingga analisis terhadap model penularan penyakit gonore dapat dilakukan melalui salah satu dari model tersebut. Diasumsikan jumlah total pria adalah konstan dan dilambangkan dengan (C_1) , dan jumlah total wanita adalah konstan dan dilambangkan dengan (C_2) dimana $a_1, a_2, b_1, b_2, C_1, C_2$ merupakan konstanta positif, maka jumlah total pria (C_1) dan jumlah total wanita (C_2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$C_1 = S_1 + X$$

$$C_2 = S_2 + Y$$

sehingga model penularan penyakit gonore dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -a_1X + b_1(C_1 - X)Y \\ \frac{dY}{dt} &= -a_2Y + b_2(C_2 - Y)X \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Keterangan Variabel:

- t = Waktu
- X = Jumlah individu pria yang terinfeksi gonore
- Y = Jumlah individu wanita yang terinfeksi gonore
- S_1 = Jumlah individu pria yang rentan
- S_2 = Jumlah individu wanita yang rentan
- C_1 = Jumlah total pria
- C_2 = Jumlah total wanita

Keterangan parameter:

- a_1 = Tingkat pengurangan jumlah individu pria yang terinfeksi
- a_2 = Tingkat pengurangan jumlah individu wanita yang terinfeksi
- b_1 = Tingkat penambahan jumlah individu pria yang terinfeksi
- b_2 = Tingkat penambahan jumlah individu wanita yang terinfeksi

Titik tetap Sistem (3) didapat dengan menolkan ruas kiri sistem yaitu: $\frac{dX}{dt} = 0$ dan $\frac{dY}{dt} = 0$. Titik tetap pada Sistem (3) merupakan titik tetap yang membuat model penularan penyakit gonore tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Titik tetap Sistem (3) adalah sebagai berikut:

$$T_1 = (X_0, Y_0) = (0, 0)$$

$$T_2 = (X_1, Y_1) = \left(\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_2(b_1 C_2 + a_1)}, \frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_1(b_2 C_1 + a_2)} \right)$$

Titik tetap pertama (T_1) merupakan titik tetap bebas penyakit, hal ini berarti bahwa dalam waktu yang lama tidak ada individu yang terjangkit penyakit gonore. Titik tetap kedua (T_2) merupakan titik tetap endemik, hal ini berarti bahwa dalam waktu yang lama tetap ada individu yang terinfeksi penyakit gonore.

ANALISIS KESTABILAN MODEL DI SEKITAR TITIK TETAP

Analisis kestabilan dilakukan dengan melakukan proses linearisasi sistem persamaan diferensial melalui pendekatan pada titik-titik tetap [7].

$$Jf(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1Y - a_1 & b_1(C_1 - X) \\ b_2(C_2 - Y) & -b_2X - a_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan matriks Jacobian dari Sistem (3). Titik tetap bebas penyakit $T_1 = (X_0, Y_0)$ disubstitusikan ke matriks Jacobian $Jf(T)$ pada Persamaan (4) diperoleh:

$$Jf(T_1) = \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 C_1 \\ b_2 C_2 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk titik tetap yang kedua atau titik tetap endemik $T_2 = (X_1, Y_1)$ apabila disubstitusikan ke matriks Jacobian $Jf(T)$ pada Persamaan (4) diperoleh:

$$Jf(T_2) = \begin{bmatrix} -\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_2 C_1 + a_2} - a_1 & \left(C_1 - \left(\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_2 (b_1 C_2 + a_1)} \right) \right) b_1 \\ \left(c_2 - \left(\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_1 (b_2 C_1 + a_2)} \right) \right) b_2 & -\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_1 C_2 + a_1} - a_2 \end{bmatrix}$$

Sifat stabilitas suatu sistem di sekitar titik tetap dapat diketahui berdasarkan tanda dari nilai eigen. Apabila tanda dari nilai eigen tidak dapat diketahui dengan mudah maka untuk menyelidiki kestabilan digunakan Kriteria Routh Hurwitz dalam Lemma 1 dan Teorema 2.

Lemma 1 [8] Semua akar real dari polinomial

$$D(s) = h_0 s^n + h_1 s^{n-1} + h_2 s^{n-2} + \dots + h_{n-1} s^1 + h_n, \quad h_0 \neq 0$$

mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika pertidaksamaan memenuhi

$$h_0 \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, h_0 \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \begin{cases} h_0 \Delta_n > 0 & (n \text{ ganjil}) \\ \Delta_n > 0 & (n \text{ genap}) \end{cases} \quad (5)$$

dengan

$$\Delta_1 = |h_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & h_5 \\ h_0 & h_2 & h_4 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & \dots & 0 \\ h_0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_n \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, untuk $n = 2$ diberikan Teorema 2.

Teorema 2 [9] Diberikan A, B adalah bilangan-bilangan real. Bagian real dari setiap akar-akar persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$$

adalah negatif jika dan hanya jika $A > 0$ dan $B > 0$.

Bukti:

(i) (\Rightarrow) akan dibuktikan jika $Re(\lambda) < 0$ dan A dan B bilangan real pada $p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$ maka $AB > 0$.

dari persamaan $p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$, maka: $h_0 = 1, h_1 = A, h_2 = B$

berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz dalam Lemma 1, maka bagian real dari setiap akar persamaan $p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$ adalah negatif jika dan hanya jika Δ_1, Δ_2 positif, yaitu:

$$\Delta_1 = |h_1| = |A| = A > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ 1 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB > 0 \Leftrightarrow A > 0 \text{ dan } B > 0$$

dengan demikian diperoleh bahwa bagian real dari setiap akar persamaan

$$p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$$

adalah negatif maka $A > 0, B > 0$.

(ii) (\Leftarrow) akan dibuktikan jika A, B positif dengan A, B bilangan real dan

$$p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$$

maka $Re(\lambda) < 0$.

diketahui A, B positif maka

$$AB > 0$$

akibatnya

$$\Delta_1 = |h_1| = |A| = A \Rightarrow \Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ 1 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB \Rightarrow \Delta_2 > 0$$

Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz, jika $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$ maka semua akar-akar dari persamaan $p(\lambda)$ adalah negatif atau mempunyai bagian real negatif. Dengan kata lain $Re(\lambda) < 0$.

\therefore Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa bagian real dari setiap akar-akar persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$$

adalah negatif jika dan hanya jika $A > 0$ dan $B > 0$. Teorema terbukti \square .

Berdasarkan titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik yang dievaluasi dalam matriks Jacobian, dianalisis kestabilan sistem di sekitar titik tetap pada Teorema 3 dan Teorema 4 sebagai berikut:

Teorema 3 [5] Diberikan persamaan karakteristik pada titik tetap T_1

$$\lambda^2 + \lambda(a_1 + a_2) + (a_1a_2 - b_1C_1b_2C_2) = 0$$

Jika $a_1a_2 > b_1C_1b_2C_2$, maka setiap akar-akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif.

Bukti:

Diketahui persamaan karakteristik pada titik tetap T_1 adalah

$$\lambda^2 + \lambda(a_1 + a_2) + (a_1a_2 - b_1C_1b_2C_2) = 0$$

Dimisalkan:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \quad (6)$$

berdasarkan persamaan karakteristik (6) maka diperoleh:

$$A = (a_1 + a_2)$$

$$B = (a_1a_2 - b_1C_1b_2C_2)$$

perhatikan bahwa $A = (a_1 + a_2)$,

diketahui $a_1a_2 > b_1C_1b_2C_2$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2, C_1, C_2 > 0$, maka $(a_1 + a_2) = A > 0$.

Selanjutnya, perhatikan $B = (a_1a_2 - b_1C_1b_2C_2)$, karena $a_1a_2 > b_1C_1b_2C_2$ maka dapat disimpulkan bahwa $(a_1a_2 - b_1C_1b_2C_2) = B > 0$.

Berdasarkan nilai koefisien persamaan $p(\lambda)$ diperoleh:

$$h_0 = 1, h_1 = A, h_2 = B$$

dibentuk matriks Hurwitz berikut:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{bmatrix}$$

berdasarkan matriks Hurwitz di atas diperoleh determinan Hurwitz:

$$\Delta_1 = |h_1| = |A| = A$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB$$

dari nilai A dan B maka dapat diketahui bahwa:

- $A > 0 \Rightarrow \Delta_1 = A > 0$
- $A > 0, B > 0$ dan $AB > 0 \Rightarrow \Delta_2 = AB > 0$

Karena nilai $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$ maka polinomial $p(\lambda)$ mempunyai pembuat nol yang bagian realnya negatif. Dengan demikian semua bilangan real nilai eigen pada matriks $Jf(T_1)$ bernilai negatif jika $a_1a_2 > b_1C_1b_2C_2$. Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz, jika determinan Hurwitz adalah positif, maka semua akar-akar dari persamaan $p(\lambda)$ adalah negatif atau mempunyai bagian real yang negatif. Dengan kata lain nilai eigen $\lambda_{(1,2)}$ mempunyai bilangan real negatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit T_1 stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu yang lama individu yang ada dalam populasi menuju titik T_1 atau tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.

Selanjutnya kestabilan Sistem (3) di sekitar titik tetap endemik diberikan pada Teorema 4.

Teorema 4 [5] Diberikan persamaan karakteristik pada titik tetap T_2

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

dengan:

$$A = \frac{(2C_1b_2a_2C_2b_1 + (b_1)^2C_1b_2(C_2)^2 + 2b_1C_1b_2C_2a_1 + (a_2)^2C_2b_1 + (a_1)^2C_1b_2 + (C_1)^2(b_2)^2b_1C_2)}{((C_2b_1 + a_1)(C_1b_2 + a_2))}$$

$$B = \frac{(C_1 b_2 b_1 C_2 - a_1 a_2)(a_1 C_1 b_2 + a_2 C_2 b_1)(a_1 a_2)^2 (C_1 b_2 b_1 C_2)^2}{(C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2)}$$

Jika $a_1 a_2 < b_1 C_1 b_2 C_2$, maka setiap akar-akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif.

Bukti:

Diketahui persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

dengan:

$$A = \frac{(2C_1 b_2 a_2 C_2 b_1 + (b_1)^2 C_1 b_2 (C_2)^2 + 2b_1 C_1 b_2 C_2 a_1 + (a_2)^2 C_2 b_1 + (a_1)^2 C_1 b_2 + (C_1)^2 (b_2)^2 b_1 C_2)}{((C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2))}$$

$$B = \frac{(C_1 b_2 b_1 C_2 - a_1 a_2)(a_1 C_1 b_2 + a_2 C_2 b_1)(a_1 a_2)^2 (C_1 b_2 b_1 C_2)^2}{(C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2)}$$

perhatikan:

$$A = \frac{(2C_1 b_2 a_2 C_2 b_1 + (b_1)^2 C_1 b_2 (C_2)^2 + 2b_1 C_1 b_2 C_2 a_1 + (a_2)^2 C_2 b_1 + (a_1)^2 C_1 b_2 + (C_1)^2 (b_2)^2 b_1 C_2)}{((C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2))}$$

diketahui bahwa $a_1 a_2 < b_1 C_1 b_2 C_2$ maka:

$$A = \frac{(2C_1 b_2 a_2 C_2 b_1 + (b_1)^2 C_1 b_2 (C_2)^2 + 2b_1 C_1 b_2 C_2 a_1 + (a_2)^2 C_2 b_1 + (a_1)^2 C_1 b_2 + (C_1)^2 (b_2)^2 b_1 C_2)}{((C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2))} > 0$$

Selanjutnya

$$B = \frac{(C_1 b_2 b_1 C_2 - a_1 a_2)(a_1 C_1 b_2 + a_2 C_2 b_1)(a_1 a_2)^2 (C_1 b_2 b_1 C_2)^2}{(C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2)}$$

dikarenakan $a_1 a_2 < b_1 C_1 b_2 C_2$ maka diperoleh:

$$B = \frac{(C_1 b_2 b_1 C_2 - a_1 a_2)(a_1 C_1 b_2 + a_2 C_2 b_1)(a_1 a_2)^2 (C_1 b_2 b_1 C_2)^2}{(C_2 b_1 + a_1)(C_1 b_2 + a_2)} > 0$$

Berdasarkan nilai koefisien polinomial $p(\lambda)$ diperoleh:

$$h_0 = 1, h_1 = A, h_2 = B$$

dibentuk matriks Hurwitz berikut:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Hurwitz di atas diperoleh determinan Hurwitz:

$$\Delta_1 = |h_1| = |A| = A$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB$$

dari nilai A dan B maka dapat diketahui bahwa:

- $A > 0 \Rightarrow \Delta_1 = A > 0$
- $A > 0, B > 0$ dan $AB > 0 \Rightarrow \Delta_2 = AB > 0$

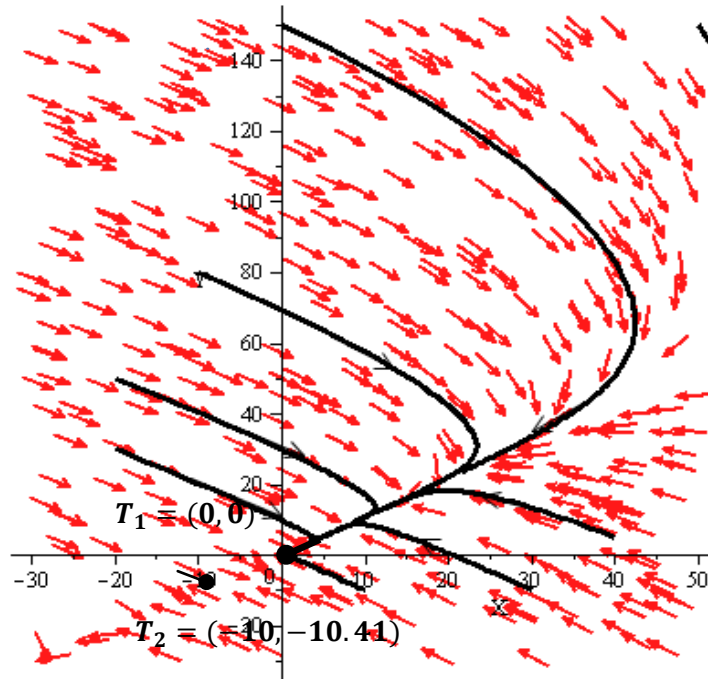
Karena nilai $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$ maka polinomial $p(\lambda)$ mempunyai pembuat nol yang bagian realnya negatif. Dengan demikian semua bilangan real nilai eigen pada matriks $Jf(T_2)$ bernilai negatif jika $a_1 a_2 < b_1 C_1 b_2 C_2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem di sekitar titik tetap $T_2 = (X_1, Y_1)$ stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu yang lama individu yang ada dalam populasi menuju titik T_2 atau masih ada individu yang terinfeksi penyakit gonore. Titik tetap T_2 disebut juga sebagai titik tetap endemik.

SIMULASI DAN INTERPRETASI NUMERIK

Gambaran umum kestabilan sistem pada titik tetap T_1 dan T_2 dapat ditunjukkan dalam potret fase dengan memilih nilai-nilai parameter yang memenuhi kriteria kestabilan model penularan penyakit gonore.

a. Titik tetap T_1 dipilih parameter $C_1 = 150$, $C_2 = 250$, $b_1 = 0.006$, $b_2 = 0.004$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Titik tetap T_1 merupakan titik tetap bebas penyakit, dimana tidak ada individu yang terinfeksi penyakit gonore. Dalam potret fase dapat dilihat keadaan kedua titik tetap T_1 dan titik tetap T_2 apabila diberikan parameter seperti yang telah disebutkan. Untuk lebih jelasnya, potret fase kestabilan model penularan penyakit gonore pada titik tetap bebas penyakit dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Potret Fase Kestabilan Model Penularan Penyakit Gonore pada Titik Tetap Bebas Penyakit

Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa sistem stabil menuju titik tetap $T_1 = (0,0)$. Apabila parameter yang telah diberikan disubstitusikan pada titik tetap T_2 maka akan diperoleh titik $T_2 = (-10, -10.41)$. Dapat dilihat pada gambar bahwa keadaan pada titik tersebut tidak stabil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit $T_1 = (0,0)$ stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu yang lama tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.

Selanjutnya, disubstitusikan nilai-nilai parameter ke dalam sistem, maka Sistem (3) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= -X + 0.006(150 - X)Y \\ \frac{d}{dt}Y(t) &= -Y + 0.004(250 - Y)X \end{aligned}$$

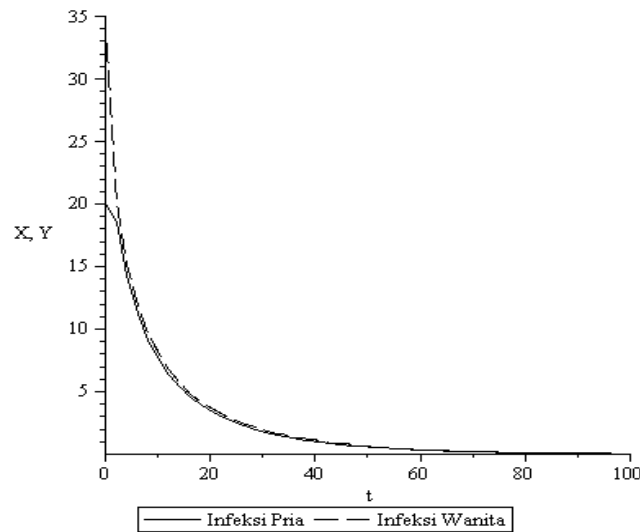
Langkah berikutnya yaitu menentukan titik tetap bebas penyakit, diperoleh titik tetap bebas penyakit sebagai berikut:

$$T_1 = (X = 0, Y = 0)$$

Proses linearisasi sistem menggunakan matrik Jacobian, diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0.9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

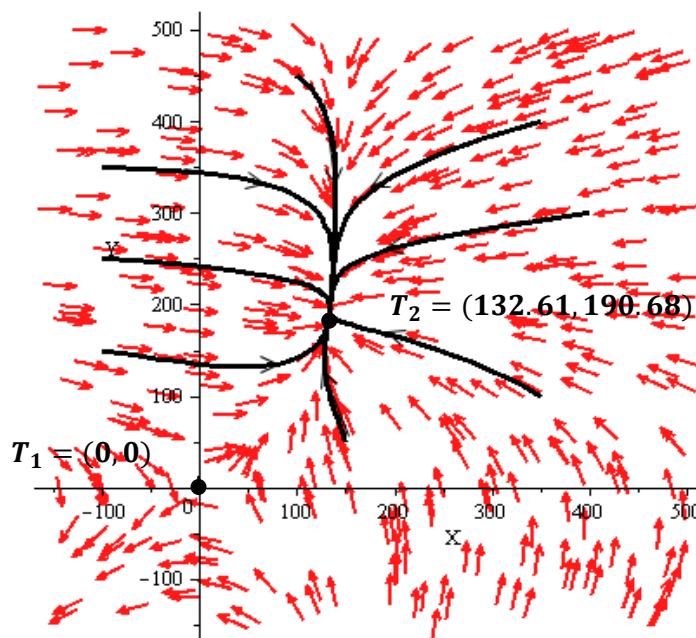
Selanjutnya dimisalkan nilai awal untuk jumlah individu pria yang terinfeksi gonore adalah 20 orang dan jumlah individu wanita yang terinfeksi gonore adalah 35 orang, maka diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik Jumlah Individu Pria dan Wanita Terinfeksi pada Suatu Waktu untuk $a_1 a_2 > b_1 b_2 c_1 c_2$

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa jumlah individu pria yang terinfeksi penyakit gonore perlahan-lahan bergerak turun menuju titik tetap bebas penyakit. Hal yang sama juga terjadi pada jumlah individu wanita yang bergerak turun menuju titik tetap bebas penyakit. Dengan tidak adanya individu terinfeksi maka populasi dalam keadaan bebas dari penyakit.

b. Titik tetap $T_2 = \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{b_2 (b_1 c_2 + a_1)}, \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{b_1 (b_2 c_1 + a_2)} \right)$ dipilih parameter $c_1 = 150, c_2 = 250, b_1 = 0.02, b_2 = 0.008, a_1 = 0.5, a_2 = 0.33$. Jika disubstitusikan pada parameter, maka $T_2 = (132.61, 190.68)$. Potret fase kestabilan model penularan penyakit gonore pada titik tetap endemik diperlihatkan oleh Gambar 4 berikut:



Gambar 4. Potret Fase Kestabilan Model Penularan Penyakit Gonore pada Titik Tetap Endemik

Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa sistem stabil menuju titik tetap $T_2 = (132.61, 190.68)$, sedangkan titik tetap $T_1 = (0,0)$ sistem tidak stabil. Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap T_2 stabil asimtotik lokal. Karena titik tetap T_2 tidak sama dengan nol maka dalam jangka waktu yang lama masih ada individu yang terinfeksi penyakit gonore. Titik tetap T_2 ini disebut juga titik tetap endemik.

Selanjutnya, berdasarkan parameter-parameter yang telah diberikan akan dilihat perilaku sistem dalam bentuk grafik. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter ke dalam sistem maka sistem dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &= -0.5X + 0.02(150 - X)Y \\ \frac{d}{dt}Y(t) &= -0.33Y + 0.008(250 - Y)X\end{aligned}$$

Langkah berikutnya yaitu menentukan titik tetap endemik, diperoleh titik tetap endemik sebagai berikut:

$$T_2 = (X = 132.61, Y = 190.68)$$

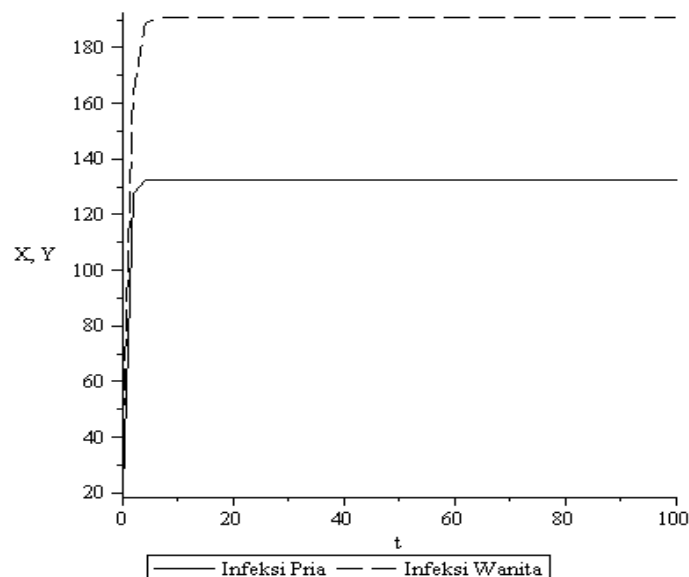
Proses linearisasi sistem di atas menggunakan matrik Jacobian, diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -0.02Y - 0.5 & 0.02(150 - X) \\ 0.008(250 - Y) & -0.008X - 0.33 \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian di titik tetap endemik T_2 adalah:

$$J = \begin{bmatrix} -4.3136 & 0.3478 \\ 0.47456 & -1.39088 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan nilai awal untuk jumlah individu pria yang terinfeksi gonore adalah 20 orang dan jumlah individu wanita yang terinfeksi gonore adalah 35 orang, maka diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 5. Grafik Jumlah Individu Pria dan Wanita Terinfeksi pada Suatu Waktu untuk $a_1 a_2 < b_1 b_2 C_1 C_2$.

Dapat dilihat pada Gambar 5 bahwa jumlah individu pria yang terinfeksi penyakit gonore dan jumlah individu wanita yang terinfeksi penyakit gonore dari kondisi awal terus meningkat mendekati titik tetap endemik. Dengan kata lain, dalam waktu 100 bulan ke depan masih ada individu terinfeksi penyakit gonore dalam populasi.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan didapat beberapa kesimpulan yaitu:

1. Model penularan penyakit gonore pada populasi heteroseksual yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -a_1 X + b_1 (C_1 - X) Y \\ \frac{dY}{dt} &= -a_2 Y + b_2 (C_2 - Y) X\end{aligned}$$

2. Jika $a_1 a_2 > b_1 C_1 b_2 C_2$ maka sistem di sekitar titik tetap $T_1 = (0,0)$ stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu yang lama individu yang ada dalam populasi menuju titik $T_1 = (0,0)$ atau tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.
3. Jika $a_1 a_2 < b_1 C_1 b_2 C_2$ maka sistem di sekitar titik tetap $T_2 = \left(\frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_2(b_1 C_2 + a_1)}, \frac{b_1 b_2 C_1 C_2 - a_1 a_2}{b_1(b_2 C_1 + a_2)} \right)$ stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu yang lama kondisi epidemi penyakit gonore tetap ada. Dengan kata lain masih ada individu yang terinfeksi penyakit gonore.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Adler FR, Lovric M. *Calculus For The Live Sciences: Modelling the Dynamics of Life*. Kanada: First Edition, Nelson Education Ltd; 2012.
- [2]. Mulyani NS, Rinawati M. *Kanker Payudara dan PMS pada Kehamilan*. Yogyakarta: Nuha Medika; 2013.
- [3]. Brooks GF, Butel JS, Morse SA. *Mikrobiologi Kedokteran* Jawetz, Melnick & Adelberg [Hartanto H, Rachman C, Dimanti A, Diani A, trans]. Jakarta: Ed ke-23, Penerbit Buku Kedokteran; 2007.
- [4]. Price SA, Wilson LM. *Patofisiologi: Konsep Klinis Proses-Proses Penyakit* [Pendis Brahm U, Hartanto H, Wulansari P, Mahanani Dewi A, trans]. Jakarta: Ed ke-6, Penerbit Buku Kedokteran; 2005.
- [5]. Braun M. *Differential Equations and Their Applications*. Berlin: Springer Verlag; 1982.
- [6]. Murray JD. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. New York: Third Edition, Springer Verlag; 2002.
- [7]. Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Third Edition, Springer Verlag; 2001.
- [8]. Gantmacher FR. *The Theory of Matrices Vol 2*. New York: AMS Chelsea Publishing; 1960.
- [9]. Tu PNV. *Dynamical System An Introduction with Application in Economic and Biology, Second Revised and Enlarged Edition*. Berlin: Springer Verlag; 1994.

TRI WAHYUNI : FMIPA UNTAN, Pontianak, twahyuni023@gmail.com
 BAYU PRIHANDONO : FMIPA UNTAN, Pontianak, beiprihandono@gmail.com
 NILAMSARI KUSUMASTUTI: FMIPA UNTAN, Pontianak, uminilam@yahoo.com